

КВАЗИКОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ

Галимзянова Л. Р.

Научный лидер. 2024. № 26 (176). Восстановленная текстовая версия.

Начнем с понятия квазициклической группы. Пусть p — простое число. Через C_{p^n} , как и обычно, будем обозначать множество всех комплексных корней из 1 степени p^n , где $n = 1, 2, \dots$. Хорошо известно, что множество C_{p^n} является конечным и состоит из p^n элементов. Относительно операции умножения комплексных чисел это множество является группой. Эта группа конечна и имеет порядок p^n .

Если $x \in C_{p^n}$, то $x^{p^n} = 1$, и тогда

$$x^{p^{n+1}} = (x^{p^n})^p = 1,$$

то есть $x \in C_{p^{n+1}}$. Поэтому $C_{p^n} \subseteq C_{p^{n+1}}$, и мы получаем бесконечную возрастающую по включению последовательность групп

$$C_1 \subseteq C_p \subseteq C_{p^2} \subseteq \dots \quad (1)$$

Обозначим через C_{p^∞} объединение всех групп этой последовательности. Множество C_{p^∞} является группой относительно операции умножения комплексных чисел. Она называется квазициклической группой типа p^∞ . [1]

Рассмотрим собственные подгруппы группы C_{p^∞} . Напомним, что подгруппа группы G называется собственной подгруппой, если она не совпадает с группой G . Хорошо известно, что любая собственная подгруппа группы C_{p^∞} совпадает с одной из подгрупп C_{p^n} , где $n = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом, квазициклические группы бесконечны, но все их собственные подгруппы конечны. Это свойство квазициклических групп лежит в основе следующего определения. [3]

Будем называть группу G квазиконечной, если она бесконечна, но все её собственные подгруппы конечны. [1]

Простейшими примерами квазиконечных групп являются квазициклические группы. Существуют также и другие примеры квазиконечных групп.

Примеры квазиконечных групп встречаются как среди абелевых групп, так и среди неабелевых. Напомним, что группа G называется абелевой, если для любых элементов x и y группы G имеет место равенство $xy = yx$.

Как отмечалось выше, примерами абелевых квазиконечных групп являются квазициклические группы; причём хорошо известно, что других примеров абелевых квазиконечных групп не существует, то есть имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Любая абелева квазиконечная группа является квазициклической.*

Доказательство этой известной теоремы (и даже более общего утверждения) приводится в настоящей работе (см. ниже теорему 3).

Долгое время оставался открытым вопрос о том, существуют ли квазиконечные группы среди неабелевых групп. Этот вопрос известен как проблема О. Ю. Шмидта. Она была решена в 1980 г. А. Ю. Ольшанским: он построил пример бесконечной неабелевой группы, в которой все собственные неединичные подгруппы конечны и имеют один и тот же фиксированный простой порядок p . Эта группа имеет очень сложное строение и получила название монстра Тарского–Ольшанского. Результат Ольшанского относится к числу наиболее знаменитых результатов теории групп.

С понятием абелевой группы тесно связано определение коммутанта.

Коммутантом группы G называется её подгруппа G' , порождённая коммутаторами её элементов. Коммутатором элементов a и b группы G называется элемент

$$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab.$$

Коммутант G' группы G может совпадать с единичной подгруппой. Это равносильно тому, что группа G абелева. Если группа G не абелева, то $1 \leq G' \leq G$, то есть коммутант занимает некоторое промежуточное положение между 1 и G . Возможна «крайняя ситуация», когда $G' = G$, — это случай, когда группа по своим свойствам наиболее далека от абелевых групп.

В настоящей работе решается следующая задача: исследовать вопрос о том, каким может быть коммутант квазиконечной группы. Эта задача решена в работе следующим образом.

Теорема 2. Пусть G — квазиконечная группа и G' — коммутант группы G . Тогда либо $G' = 1$, либо $G' = G$.

Как уже отмечалось выше, условие $G' = 1$ равносильно тому, что группа G является абелевой. Поэтому из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.1. Пусть G — неабелева квазиконечная группа и G' — коммутант группы G . Тогда $G' = G$.

Замечание. Отсюда следует, что любой монстр Тарского–Ольшанского совпадает со своим коммутантом.

Доказательство теоремы 2 является одной из целей данной работы. Кроме того, в работе доказаны и некоторые другие утверждения о квазиконечных группах. Так, например, доказано следующее обобщение теоремы 1.

Теорема 3. Любая разрешимая квазиконечная группа является квазициклической.

Эта теорема обобщает теорему 1, так как любая абелева группа является разрешимой. Группа G называется разрешимой, если существует натуральное число n такое, что n -й коммутант группы G совпадает с единичной подгруппой. Напомним, что n -й коммутант группы G строится по индукции следующим образом. Пусть G' — коммутант группы G . Коммутант группы G' называется вторым коммутантом группы G и обозначается через G'' . Коммутант группы G'' называется третьим коммутантом группы G и обозначается через $G^{(3)}$. Продолжая эти построения, на n -м шаге мы получим n -й коммутант группы G . Он обозначается через $G^{(n)}$.

Лемма 1. Пусть G — произвольная группа, H — конечная нормальная подгруппа группы G , X — множество всех элементов группы G , перестановочных с каждым элементом группы H . Тогда индекс $[G : X]$ конечен.

Лемма 2. Пусть G — квазиконечная группа, H — конечная нормальная подгруппа группы G , X — множество всех элементов группы G , перестановочных с каждым элементом группы H . Тогда $X = G$. Иными словами, каждый элемент из H перестановочен с любым элементом из G .

Доказательство. Допустим от противного, что X не совпадает с G . Тогда по определению квазиконечной группы подгруппа X конечна. С другой стороны, по лемме 1 индекс $[G : X]$ конечен. Так как X конечна и индекс $[G : X]$ конечен, то и группа G конечна. Но это невозможно, так как по определению любая квазиконечная группа бесконечна.

Лемма доказана. [3]

Список литературы

1. Ольшанский А. Ю., Шмелькин А. Л. Бесконечные группы // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». — 1989. — Т. 37. — С. 5–113.
2. Дерябина Г. С., Ольшанский А. Ю. Подгруппы квазиконечных групп // Успехи математических наук. — 1986. — Т. 41. — № 6 (252). — С. 169–170.
3. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. — М.: Наука, 1982.
4. Хамермеш М. Теория групп. — М.: Мир, 1966. — С. 124–126.

Источник электронной публикации: <https://scilead.ru/article/6865-kvazikonechnie-gruppi>